数理解析研究所講究録 1415 巻 2005 年 160-167

An ε-Saddle Point of a Fractional Game

木村　寛，松山敬左，星野満博，川島洋人，矢戸弓雄
秋田県立大学　システム科学技術学部　経営システム工学科

1 Introduction

分数形 2 人ゼロ和ゲーム (GP) を次の集合

$$(N, X, Y, f, g, G) \tag{1.1}$$

で与える. ここで,

1. $N := \{1, 2\}$ を Player の集合.
2. E を 線形位相空間とし, 各々の Player I,II は戦略集合 $X, Y \subset E$ から, それぞれ戦略 $x \in X, y \in Y$ を選ぶものとする.
3. $f : X \times Y \to \boldsymbol{R}$, $g : X \times Y \to \boldsymbol{R}_+$. ただし, $\boldsymbol{R}_+ = (0, \infty)$.
4. $G = f/g : X \times Y \to \boldsymbol{R}$, つまり, 任意の $(x, y) \in X \times Y$ に対して, $G(x, y) = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ と定義し, Player I の**損失関数** (loss function) とする. よって, 今 2 人ゼロ和ゲームより, Player II の損失関数は $-G$ である.

また,

$$\overline{\theta} := \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} G(x, y), \qquad \underline{\theta} := \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} G(x, y) \tag{1.2}$$

とおく.

$\overline{\theta}$ は Player I の **minimal worst loss** と呼ばれ, $\underline{\theta}$ は Player II の **maximal worst gain** といわれる.

一般には, $\overline{\theta} \geq \underline{\theta}$ が成り立ち, $\overline{\theta} \neq \underline{\theta}$ のとき, **dualty gap** が存在しているという.

Definition 1.1 ゲーム (GP) が **game value** (in short, a value) をもつとは

$$\overline{\theta} = \underline{\theta} =: \theta^* \tag{1.3}$$

が成り立つときをいう. また, この θ^* をゲーム (GP) の **value** とよぶ.

Definition 1.2 $y^* \in Y$ がゲーム (GP) の **max-inf** であるとは,

$$\overline{\theta} = \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} G(x,y) = \inf_{x \in X} G(x,y^*) \tag{1.4}$$

が成り立つことをいい，また, $x^* \in X$ がゲーム (GP) の **mini-sup** であるとは,

$$\underline{\theta} = \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} G(x,y) = \sup_{y \in Y} G(x^*,y) \tag{1.5}$$

が成り立つことをいう.

Proposition 1.1 ゲーム (GP) が次の (1)(2) のどちらか一方,

(1) $x^* \in X$ が (GP) の mini-sup;

(2) $y^* \in Y$ が (GP) の max-inf,

を満たしているならば，$\overline{\theta} = \underline{\theta}$ が成り立つ.

証明は 参考文献 [1] 参照.

Definition 1.3 $(x^*,y^*) \in X \times Y$ がゲーム (GP) の **saddle point** であるとは, 次が成り立つことをいう.

$$\sup_{y \in Y} G(x^*,y) = G(x^*,y^*) = \inf_{x \in X} G(x,y^*). \tag{1.6}$$

$$\Big(\textit{i.e.,} \quad G(x^*,y) \leq G(x^*,y^*) \leq G(x,y^*), \qquad \forall x \in X, \forall y \in Y \Big)$$

このとき, 次であることが知られている.

Proposition 1.2 $x^* \in X$ がゲーム (GP) の mini-sup (または，$y^* \in Y$ が max-inf) であるならば，game value θ^* が存在し,

$$\overline{\theta} = \underline{\theta} =: \theta^* \tag{1.7}$$

を満たす.

Proposition 1.3 $(x^*,y^*) \in X \times Y$ がゲーム (GP) の saddle point であるための必要十分条件は, $x^* \in X$ が (GP) の mini-sup かつ, $y^* \in Y$ が (GP) の max-inf であることである.

証明は，参考文献 [1] 参照.

ゲーム (GP) に対して，直接，game value や ε-saddle point, saddle point を求めるのは困難であるため，次のパラメトリックゲームを考える.

よってはじめに, (GP) に対するパラメトリックゲーム (GP_θ) を構成する.

2 A Parametric Game of (GP)

ゲーム (GP) に対するパラメトリックゲーム (GP_λ) を次の集合で与える:

$$(N, X, Y, f, g, \lambda, F_\lambda) \tag{2.1}$$

ここで,

1. $N := \{1, 2\}$ を Player の集合.
2. E を 線形位相空間とし, 各々の Player I,II は戦略集合 $X, Y \subset E$ から, それぞれ戦略 $x \in X, y \in Y$ を選ぶものとする.
3. $f : X \times Y \to \boldsymbol{R}$, $g : X \times Y \to \boldsymbol{R}_+$.
4. $\lambda \in \boldsymbol{R}$.
5. $F_\lambda = f - \lambda g : X \times Y \to \boldsymbol{R}$ と定義し, Player I の損失関数とする. つまり, 任意の $(x, y) \in X \times Y$ に対して $F_\lambda(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ である. また, 今 2 人ゼロ和ゲームより, Player II の損失関数は $-F_\lambda$ である.

また,

$$\overline{F}_\lambda := \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} F_\lambda(x, y), \qquad \underline{F}_\lambda := \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} F_\lambda(x, y) \tag{2.2}$$

とおく.

(GP) における定義と同様にして, 次の定義を与える.

Definition 2.1 ゲーム (GP_λ) が game value (in short, a value) をもつとは

$$\overline{F}_\lambda = \underline{F}_\lambda =: F_\lambda^* \tag{2.3}$$

が成り立つときをいう. また F_λ^* をゲーム (GP_λ) の value とよぶ.

Definition 2.2 $y^* \in Y$ がゲーム (GP_λ) の max-inf であるとは,

$$\overline{F}_\lambda = \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} F_\lambda(x, y) = \inf_{x \in X} F_\lambda(x, y^*) \tag{2.4}$$

が成り立つことをいい, また, $x^* \in X$ がゲーム (GP_λ) の mini-sup であるとは,

$$\underline{F}_\lambda = \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} F_\lambda(x, y) = \sup_{y \in Y} F_\lambda(x^*, y) \tag{2.5}$$

が成り立つことをいう.

Definition 2.3 $(x^*, y^*) \in X \times Y$ がゲーム (GP_λ) の saddle point であるとは, 次が成り立つことをいう.

$$\sup_{y \in Y} F_\lambda(x^*, y) = G(x^*, y^*) = \inf_{x \in X} F_\lambda(x, y^*). \tag{2.6}$$

Proposition 2.1 $(x^*, y^*) \in X \times Y$ がゲーム (GP_λ) の saddle point であるための必要十分条件は, $x^* \in X$ が (GP_λ) の mini-sup かつ $y^* \in Y$ が (GP_λ) の max-inf であることである.

Proof. Proposition 1.3 と同様. □

Definition 2.4 $X, Y \subset E$ を空でない集合, $\varphi : X \times Y \to \boldsymbol{R}$ とする. このとき任意の $y \in Y$ に対して $\varphi(\cdot, y)$ が **convexlike** であるとは, 任意の $x_1, x_2 \in X$ と α $(0 \le \alpha \le 1)$ に対して, ある $x_0 \in X$ が存在して,

$$\varphi(x_0, y) \le \alpha\varphi(x_1, y) + (1-\alpha)\varphi(x_2, y), \qquad \forall y \in Y \tag{2.7}$$

が成り立つことである.

Theorem 2.1 (Minimax Theorem 1) [1]
X をコンパクト凸集合とし, $\varphi : X \times Y \to \boldsymbol{R}$ は次の条件を満たすものとする.

(1) $\forall y \in Y, \varphi(\cdot, y) : X \to \boldsymbol{R}$, l.s.c., convex;

(2) $\forall x \in X, \varphi(x, \cdot) : Y \to \boldsymbol{R}$, concavelike.

このとき次が成り立つ.

$$\sup_{y \in Y} \min_{x \in X} \varphi(x, y) = \min_{x \in X} \sup_{y \in Y} \varphi(x, y). \tag{2.8}$$

Ky Fan's system Th. を用いることにより示される. 参考文献 [1] 参照.

Theorem 2.2 (Minimax Theorem 2) [1]
Y をコンパクト凸集合とし, $\varphi : X \times Y \to \boldsymbol{R}$ は次の (1)(2) を満たすものとする.

(1) $\forall y \in Y, \varphi(\cdot, y) : X \to \boldsymbol{R}$, convexlike;

(2) $\forall x \in X, \varphi(x, \cdot) : Y \to \boldsymbol{R}$, upper semicontinuous, concave.

このとき, 次が成り立つ.

$$\sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \varphi(x, y) = \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} \varphi(x, y). \tag{2.9}$$

Corollary 2.1 (Minimax Theorem 3)
X, Y をコンパクト凸集合とし, $\phi : X \times Y \to \boldsymbol{R}$ は次の (1)(2) を満たすものとする.

(1) $\forall y \in Y, \varphi(\cdot, y) : X \to \boldsymbol{R}$, lower semicontinuous, convex;

(2) $\forall x \in X, \varphi(x, \cdot) : Y \to \boldsymbol{R}$, upper semicontinuous, concave.

このとき次が成り立つ.

$$\min_{x\in X}\max_{y\in Y}\varphi(x,y)=\max_{y\in Y}\min_{x\in X}\varphi(x,y) \tag{2.10}$$

Theorem 2.3 $X\subset E$ はある部分集合, $Y\subset E$ をコンパクトな凸部分集合とし, $f: X\times Y\to \boldsymbol{R}$, $g: X\times Y\to \boldsymbol{R}_+$ は条件 (1)(2)(3)(4) を満たすものとする.

(1) $\forall y\in Y, x\mapsto f(x,y)$,convex;

(2) $^\forall x\in X, y\mapsto f(x,y)$,upper semicontinuous, concave;

(3) $^\forall y\in Y, x\mapsto g(x,y)$,concave;

(4) $^\forall x\in X, y\mapsto g(x,y)$,lower semicontinuous, convex.

このとき, 任意の $\lambda\geq 0$ に対して, 次が成立する.

$$\exists y^*\in Y,\quad s.t.\ \ \overline{F}_\lambda=\underline{F}_\lambda=\inf_{x\in X}F_\lambda(x,y^*). \tag{2.11}$$

(*i.e.*, $y^*\in Y$ はゲーム (GP_λ) の max-inf.)

Proof. 任意の $x\in X$ に対して，関数 $F_\lambda(x,\cdot):Y\to\boldsymbol{R}$ は条件 (2)(4) より，u.s.c. かつ concave である．一方，任意の $y\in Y$ を固定したとき，関数 $F(\cdot,y):X\to\boldsymbol{R}$ は (1)(3) より，convex となる．よって, Theorem 2.2 より,

$$\exists y^*\in Y,\quad s.t.,\ \ \max_{y\in Y}\inf_{x\in X}F_\lambda(x,y)=\inf_{x\in X}F_\lambda(x,y^*)=\inf_{x\in X}\max_{y\in Y}F_\lambda(x,y). \tag{2.12}$$

ゆえに, $\overline{F}_\lambda=\underline{F}_\lambda$ である. □

$\overline{F}_\lambda$ と，$\overline{\theta}$ の関係について，次の Lemma が成り立つ.

Lemma 2.1 $\overline{F}_\lambda$ について次が成りたつ.

(a) $\overline{F}_\lambda$ は λ に関して非増加関数;

(b) $\overline{F}_\lambda<0$ ならば, $\lambda\geq\overline{\theta}$;

(c) $\overline{F}_\lambda>0$ ならば, $\lambda\leq\overline{\theta}$;

(d) $\lambda>\overline{\theta}$ ならば, $\overline{F}_\lambda\leq 0$;

(e) $\lambda<\overline{\theta}$ ならば, $\overline{F}_\lambda\geq 0$.

さらに Y がコンパクト, 任意の $x\in X$ に対して $y\mapsto f(x,y)$ が連続, $y\mapsto g(x,y)$ が連続ならば,

(f) $\overline{F}_\lambda<0\iff\lambda>\overline{\theta}$;

(g) $\overline{F}_{\overline{\theta}}\geq 0$.

$\underline{F}_\lambda$ と $\underline{\theta}$ については以下のことが成りたつ.

Lemma 2.2 $\underline{F}_\lambda$ について次が成りたつ.

(a) $\underline{F}_\lambda$ は非増加関数;

(b) $\underline{F}_\lambda < 0$ ならば, $\lambda \geq \underline{\theta}$;

(c) $\underline{F}_\lambda > 0$ ならば, $\lambda \leq \underline{\theta}$;

(d) $\lambda > \underline{\theta}$ ならば, $\underline{F}_\lambda \leq 0$;

(e) $\lambda < \underline{\theta}$ ならば, $\underline{F}_\lambda \geq 0$.

さらに X がコンパクト, 任意の $y \in Y$ に対して $x \mapsto f(x,y)$ が連続, $x \mapsto g(x,y)$ が連続のとき,

(f) $\underline{F}_\lambda > 0 \Longleftrightarrow \underline{\theta} > \lambda$;

(g) $\underline{F}_{\underline{\theta}} \leq 0$.

Theorem 2.4 ゲーム (GP) は value θ^* をもち, $\overline{F}_{\theta^*} \geq 0$ を満たしているものとする. このとき, $y^* \in Y$ がゲーム (GP_{θ^*}) の max-inf であるならば, $y^* \in Y$ はゲーム (GP) の max-inf である.

Proof. 仮定 $\overline{F}_{\theta^*} \geq 0$ であることと $y^* \in Y$ がゲーム (GP_{θ^*}) の max-inf であることから,

$$0 \leq \overline{F}_{\theta^*} = \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} F_{\theta^*}(x,y) = \inf_{x \in X} F_{\theta^*}(x,y^*) \leq F_{\theta^*}(x,y^*), \qquad {}^\forall x \in X. \tag{2.13}$$

よって,

$$\theta^* \leq G(x,y^*) \leq \sup_{y \in Y} G(x,y), \qquad {}^\forall x \in X \tag{2.14}$$

より,

$$\theta^* \leq \inf_{x \in X} G(x,y^*) \leq \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} G(x,y) = \overline{\theta} = \theta^*$$

が成り立つ. つまり,

$$\theta^* = \inf_{x \in X} G(x,y^*) = \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} G(x,y).$$

ゆえに, $y^* \in Y$ はゲーム (GP) の max-inf である. □

3 An ε-Saddle Point of a Fractional Game

Theorem 3.1 $X \subset E$ はある部分集合, $Y \subset E$ をコンパクトな凸部分集合とし, $f : X \times Y \to \boldsymbol{R}$, $g : X \times Y \to \boldsymbol{R}_+$ は以下の条件を満たすものとする.

(1) $\forall y \in Y,\ x \mapsto f(x,y)$, convex;

(2) $\forall x \in X,\ y \mapsto f(x,y)$, continuous, concave;

(3) $\forall y \in Y,\ x \mapsto g(x,y)$, concave;

(4) $\forall x \in X,\ y \mapsto g(x,y)$, continuous, convex.

このとき, $\overline{\theta} \geq 0$ ならば, 次の (i)(ii) が成り立つ.

(i) $\overline{\theta} = \underline{\theta} =: \theta^*$;

(ii) ゲーム (GP) の max-inf $y^* \in Y$ が存在する.

Proof. (i) $\overline{\theta} \geq \underline{\theta}$ は明らかであるから, $\overline{\theta} \leq \underline{\theta}$ であることを示す. 今, 仮定より $\overline{\theta} \geq 0$ であることから Lemma 2.1(g) と Theorem 2.3 より,

$$\overline{F}_{\overline{\theta}} = \underline{F}_{\overline{\theta}} \geq 0. \tag{3.1}$$

また, Lemma 2.2 より, $(GP_{\overline{\theta}})$ の max-inf $y^* \in Y$ が存在する. つまり,

$$\underline{F}_{\overline{\theta}} = \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} F_{\overline{\theta}}(x,y) = \inf_{x \in X} F_{\overline{\theta}}(x,y^*). \tag{3.2}$$

ここで, (3.1),(3.2) より,

$$0 \leq \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} F_{\overline{\theta}}(x,y) = \inf_{x \in X} F_{\overline{\theta}}(x,y^*) \leq F_{\overline{\theta}}(x,y^*), \qquad {}^\forall x \in X. \tag{3.3}$$

よって, (3.3) より,

$$\overline{\theta} \leq G(x,y^*), \qquad {}^\forall x \in X.$$

ゆえに,

$$\overline{\theta} \leq \inf_{x \in X} G(x,y^*) \leq \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} G(x,y) = \underline{\theta}. \tag{3.4}$$

したがって, $\overline{\theta} = \underline{\theta}$ が成り立つ.

(ii) $\overline{F}_{\theta^*} \geq 0$ と $y^* \in Y$ がゲーム (GP_{θ^*}) の max-inf であることから Theorem 2.4 から $y^* \in Y$ はゲーム (GP) の max-inf である. □

Theorem 3.2 Y はコンパクト凸集合とし, $f : X \times Y \to \boldsymbol{R},\ g : X \times Y \to \boldsymbol{R}_+$ は以下の条件を満たすものとする.

(1) $\forall y \in Y,\ x \mapsto f(x,y)$, convex;

(2) $\forall x \in X,\ y \mapsto f(x,y)$, continuous, concave;

(3) $\forall y \in Y,\ x \mapsto g(x,y)$, concave;

(4) $\forall x \in X,\ y \mapsto g(x,y)$, continuous, convex.

このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ と, $\overline{\theta} \geq 0$ ならば, 次を満たす $(x^*,y^*) \in X \times Y$ が存在する.

$$\theta^* - \varepsilon < G(x^*,y^*) < \theta^* + \varepsilon \tag{3.5}$$

Proof. Theorem 3.1 より，$\overline{\theta} = \underline{\theta} = \theta^*$ であることより，$\theta^* \geq 0$ である．よって，Lemma 2.1 と，Theorem 2.3 より，$y^* \in Y$ が存在し，

$$\underline{F}_{\theta^*} = \overline{F}_{\theta^*} = \inf_{x \in X} F_{\theta^*}(x, y^*) \geq 0$$

を満たす．よって，$F_{\theta^*}(x, y^*) \geq 0$ より，$\theta^* - \varepsilon < G(x, y^*)$ を得る．

一方，$\overline{\theta} < \theta^* + \varepsilon$ より，Lemma 2.1 から，

$$F_{\theta^*+\varepsilon}(x, y) = \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} F_{\theta^*+\varepsilon}(x, y) < 0$$

である．よって，$F_{\theta^*+\varepsilon}(x^*, y) < 0$ を満たす $x^* \in X$ が存在することから，任意の $y \in Y$ に対して，$G(x^*, y) < \theta^* + \varepsilon$ を得る．したがって，$y^* \in Y$ に対しても成り立つので，

$$G(x^*, y^*) < \theta^* + \varepsilon$$

である．したがって以上から，

$$\theta^* - \varepsilon < G(x^*, y^*) < \theta^* + \varepsilon$$

である． □

References

[1] J.-P.Aubin, Mathematical Methods of Game and Economic Theory, Revised Edition (North-Holland, Amsterdam 1982).

[2] J.-P. Aubin and A. Cellina, Differential Inclusion, Springer-Verlag, Grundlehren der math, (1984).

[3] J.-P. Aubin and I. Ekeland, Applied Nonlinear Analysis, A Wiley-Interscience Publication, (1984).

[4] J.-P. Aubin and H. Frankowska, Set-Valued Analysis, Birkhäuser Boston, (1990).

[5] J.-P.Aubin, Optima and Equilibria (Springer-Verlag, New York, 1993).

[6] V. Barbu and Th. Precupanu, Convexity and Optimization in Banach Spaces, Editura Academiei, Bucharest, Romania, (1986).

[7] R.E.Bruck, A Simple Proof of The Mean Ergodic Theorem for Nonlinear Contractions in Banach Spaces, Israel J. Math. 32 (1979) 107-116.

[8] Y. Kimura, Y. Sawasaki, and K. Tanaka, A Noncooperative Equilibrium for n-Person Game with Fractional Loss Function, Proceedings of the International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, World Scientific, (1999) 44-51.

[9] D.G.Luenberger, Optimization by Vector Space Methods (John Wiley & Sons, inc., 1969).

[10] Y. Sawasaki, Y. Kimura, and K. Tanaka, A Two-Person Zero-Sum Game with Fractional Loss Function, Journal of Operations Research Society of Japan, 43-1 (2000) 209-218.

[11] K. Tanaka and K. Yokoyama, On ε-Equilibrium Point in a Noncooperative n-person Game, J. Math. Anal. Appl., 160 (1991) 413-423.

[12] R.T.Rockafellar, Extension of Fenchel's duality theorem for convex functions, Duke Math. J. 33 (1966) 81-89.